

簡支樑結構產品的振動分析

黃運琳，林育信

國立虎尾科技大學機械設計工程系

E-mail:hwang@nfu.edu.tw

國科會計劃編號: NSC 92-2622-E150-008-CC3 與 NSC 93-2815-C-150-012-E

摘要

振動分析一般有兩種方法。第一種是數值分析計算法，其中最常用的為有限元素法。第二種是頻譜儀器量測法。數值分析計算法現今大都利用電腦模擬，如 ANSYS、COSMOS 與 NASTRAN 等商業化應用軟體；但是在對於較複雜的結構或是接面（如螺絲、滑塊、轉動軸等）較多的結構時，計算法就會失去其精準度，這就是電腦模擬還是無法完全取代頻譜儀器量測法的原因。本專題主要的研究方向是以 ANSYS 對一簡支樑進行振動分析。利用頻譜分析儀及其振動量測軟體量取激振器實際在簡支樑上激振所產生的振動信號，再利用 ME' scopeVES 軟體作模態分析，同樣分析出前五個模態及其對應的頻率以瞭解其相關振動的現象，並與 ANSYS 得到的資料比較。根據以上研究步驟與方法，將可以獲得各種簡支樑結構產品的頻率響應函數、關聯性函數及模態參數，並且加以設計振動控制的方法以便使得各種簡支樑結構產品系統的工作頻率範圍落在相關零件產品的共振頻率之外，則避免使簡支樑結構產品結構產生過大振幅，甚至超過產品的容許應力或應變範圍而產生破壞現象。

關鍵詞：簡支樑結構產品、數值分析計算法、頻譜儀器量測法、模態分析、共振頻率。

1. 前言

模態分析[1]是求得結構動態特性的過程，其動態特性是以振模(Modes)所組合的數學模式來表示，振模的主要物理意義則以模態參數來表示，其中模態參數包括自然頻率、阻尼與模態振型。每個模態振型都會有其對應的自然頻率，由於模態分析是分析簡諧外力和暫態外力的基礎，其為計算結構在自由狀態下的自然頻率和模態振型。對一個連續的結構來說，它在理論上有無限多個自然頻率。而實際上的考量是僅有前面幾個自然頻率所對應的模態被考慮之，因為較前面的模態振型較容易被激發[2]，而較高的模態因為其複雜的模態振型故需要較多的能量。自然頻率的重要在於假如有一個固定激振源的自然頻率（如馬達的固定轉速）接近其結構上的自然頻率，其共振可能會發生。而共振的環境，可能造成結構體異常的振動以及巨大的損害。所以工程師在設計上都是確定結構的自然頻率不可接近機械的激振源的自然頻率來輕易地避免這問題。模態分析方法主要有兩種：理論模態分析（理論數學模式，有限元素法）與實驗模態分析（實驗數學模式，模態測試）[3]。

模態測試可以幫助瞭解結構動態特性以及進一步的異常診斷。由假設的激振預測結構響應檢查動態特性，預測物理性質改變（如增加負載或剛性），造成動態特性的改變。自然頻率及振型也可協助診斷並改善異常振動噪音[4]。

本研究論文的主要目的乃是探討簡支樑結構產品的模態特性，以市場上現有的簡支樑結構產品進行實驗模態分析，由理論分析法、有限元素數值分析法與實驗量測分析法所得的結果相互印證，以便證明所模擬架構的簡支樑結構產品實驗模型的正確性[5-10]。

2. 理論分析

考慮在 $X-Y$ 平面上的橫樑的側向振動如圖 1 所示， $X-Y$ 假設為一個任意斷面的對稱平面，是以 y 表示一小段橫樑的側向移動，並將此段至左邊端點的距離定義為 x ，圖 2 為一段長度 dx 元素承受慣性力及內力的自由體圖。

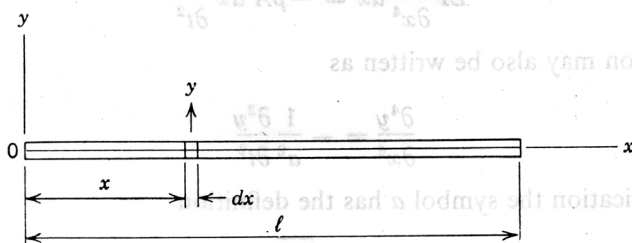


圖 1 橫樑的側向振動

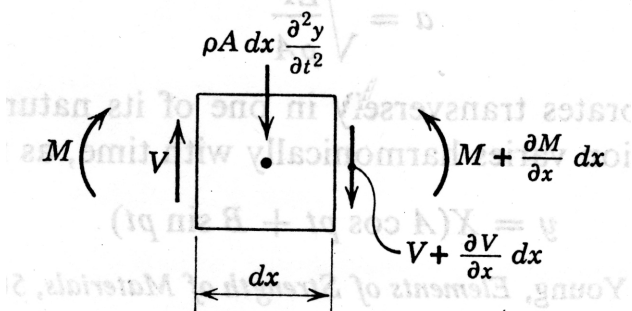


圖 2 長度 dx 樑元素受慣性力及內力的自由體圖

當橫樑受到側向振動時剪力在 y 方向的平衡狀態方程式為

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx - \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

因為

$$\frac{\partial V}{\partial x}(dx)^2 \approx 0 \quad (2)$$

在基本的彎矩原理知道下面方程式

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

則方程式(1)可以簡化為

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx = -\rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

上面是一個橫樑的側向自由振動的通用方程式，考慮一個的特例，如果 EI 不隨 x 而變化，可得知下式：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx + \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

上式為長度為 L 的均勻懸臂樑根據傳統樑理論的假設，不考慮橫樑的旋轉慣性與剪變形，並忽略阻尼效應所得到的橫樑自由振動方程式。如果受到外力影響，則橫樑的強制振動方程式可以寫成：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx + \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (6)$$

其中 y 為橫樑的側向位移， E 為橫樑的楊氏係數， I 為橫樑的截面慣性矩， ρ 為橫樑的密度， A 為橫樑的截面積，而 $q(x, t)$ 則為作用於外力函數。

簡支樑的邊界條件：一端為固定端，懸臂樑的位移與斜率為零；而另一端為簡支端，懸臂樑的位移與彎矩為零。即[6-8]

在 $x=0$ 時，

$$y(0) = \frac{\partial y(0)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

在 $x=L$ 時，

$$y(L) = \frac{\partial^2 y(L)}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

可得到：

$$\tan(kL) = \tanh(kL) \quad (9)$$

在自由振動下的自然頻率為

$$f_i = \frac{(k_i L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} \quad (10)$$

其中[9]

$$k_i L \approx \left(i + \frac{1}{4}\right)\pi, \quad i = 1, \dots, \infty \quad (11)$$

表 1 前五個模態之理論值

$k_1 L$	$k_2 L$	$k_3 L$	$k_4 L$	$k_5 L$
3.927	7.069	10.21	13.352	16.493

簡支樑在前三個模態下的振型如圖 3 所示：

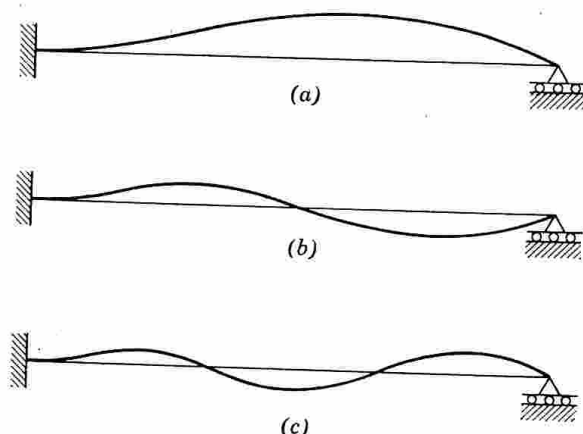


圖 3 (a) 模態一，(b) 模態二，(c) 模態三

2.1 理論實驗值

此次實驗乃測試兩支長短鋼尺，其幾何形狀與尺寸如圖 4，圖 5 所示：

短尺：

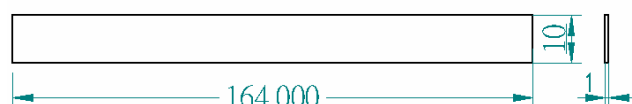


圖 4 短尺形狀

長尺：

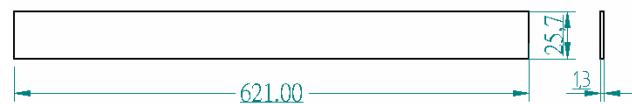


圖 5 長尺形狀

其中面積慣性矩 (b 為鋼尺截面長， h 為截面高 (厚度))

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (12)$$

首先在鋼尺尖端掛上一個微小荷重，然後以雷射位移計量測其變形量，亦即

$$v_B = v_l - v_0 \quad (13)$$

其中 v_0 為鋼尺位移前的讀取量， v_l 為鋼尺位移後的讀取量，再計算出以上的 v_B 數據並代入鋼尺位移變形公式：

$$v_B = \frac{FL^3}{3EI} \quad (14)$$

即可得到鋼尺材質的楊氏係數

$$E = \frac{FL^3}{3v_B I} \quad (15)$$

表 2 實驗的相關數據與楊氏係數

砝碼重量 (g)	5.0	10.0	15.0	20.1	平均值
v_B (mm)	1.791	3.550	5.272	7.057	
L (mm)	290	290	290	290	
I (mm ⁴)	2.083	2.083	2.083	2.083	
E (GPa)	106.9	107.8	108.9	109.0	108.2

表 3 鋼尺物理性質與幾何尺寸

	短尺	長尺
b (mm)	15	25.7
h (mm)	1.0	1.3
L (mm)	164	621
體積(mm ³)	2460	20747.61
重量(g)	15.5	145.5
E (GPa)	108.16	108.16
I (mm ⁴)	1.25	4.705
密度(g / mm ³)	5.5706E-3	5.5706E-3

然後將 E 值代入(10)式後，即可求出各個模態下的共振頻率，其前五個模態的自然頻率理論分析公式如下

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{(3.927)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{(7.069)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{(10.210)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$f_4 = \frac{\omega_4}{2\pi} = \frac{(13.352)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

$$f_5 = \frac{\omega_5}{2\pi} = \frac{(16.493)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$$

前五個模態的自然頻率理論值：

表 4 自然頻率理論值

模態	短尺 理論值(Hz)	長尺 理論值(Hz)
1	109.12	9.379
2	353.59	30.393
3	737.63	63.403
4	1261.48	108.431
5	1924.81	165.448

3. 振動頻譜量測實驗

以激振器實際在簡支樑產品上從事激振來產生振動的實驗，藉由多頻道頻譜分析儀及其相關軟體抓取振動的數據資料並記錄成檔案。激振器的量測方法，屬於固定響應方式，就是將激振器固定於一點，感測器放於所有位置，產生振動信號，將信號轉換成 FRF 或其他格式檔，即可在 ME' scopeVES 中分析振動情形。

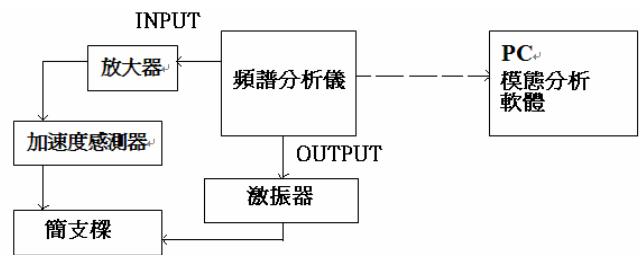


圖 6 CI2250 設備裝置圖

3.1 設備

1. 激振器，2. 加速度規，3. 連接線，4. 信號放大器 ⇒ 2 個感應偏差交流伏特計，5. 電腦：P4 以上 PC（PCMCIA-CARD/USB 介面），6. CI2250 量測軟硬體/Photon-II 量測軟硬體，7. 多通道頻譜分析儀，8. 測試物 ⇒ 簡支樑（短尺/長尺）。9. 固定裝置 ⇒ C 型夾。

3.2 Photon-II/RT-Pro 頻譜訊號分析器收值

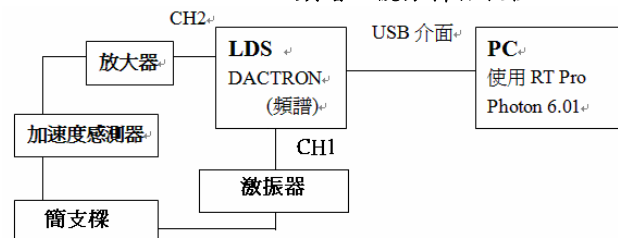


圖 7 Photon-II 設備裝置圖

3.3 注意事項

- 待測簡支樑是否平穩，懸臂平板固定端邊界是否緊緊固定。
- 激振器之信號線鎖緊，若沒有鎖緊則會發生無法量測之現象。
- 感測器（加速度規）須緊貼於簡支樑上，激振試驗時，須隨時檢查有無鬆動情形。

3.4 ME' scopeVES 模態量測振動分析

藉由多頻道頻譜分析儀抓取簡支樑在經激振後的振動數據再經由 ME' scopeVES 模態分析軟體的分析產生結果。再與 ANSYS 有限元素分析軟體所模擬之結果作比較，以驗證研究成果。

4. 有限元素數值分析

以 ANSYS 這套電腦軟體對一簡支樑進行自然振動 (Free Vibration) 分析, 分析前五個模態和其所對應的自然頻率。此外並且模擬一組簡諧外力對簡支樑從事強制振動 (Forced Vibration) 所產生的位移變化。

4.1 步驟:

1. 以 CAD 電腦輔助設計軟體將鋼尺的幾何形狀實體成型。
2. 開啟 ANSYS 軟體。
3. 進入 ANSYS 畫面

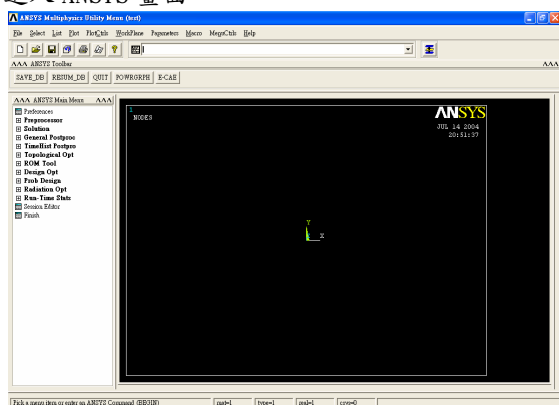


圖 8

4. 將所需要的零件匯入

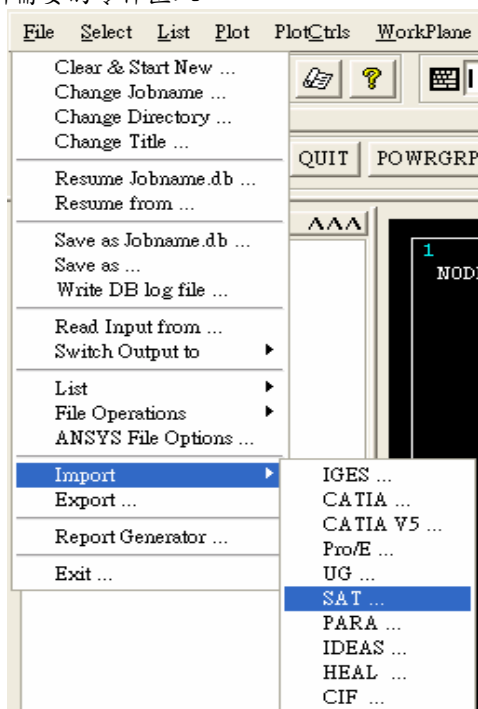


圖 9

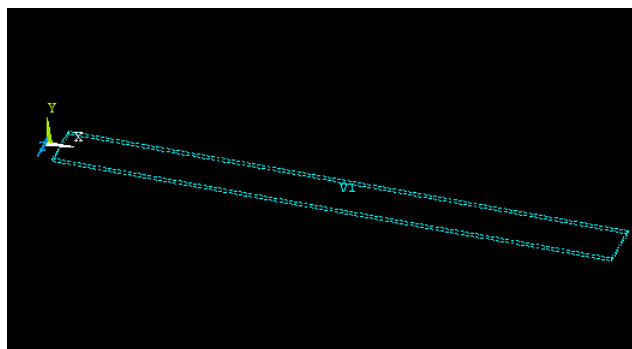


圖 10

5. 設定 ANSYS 模式

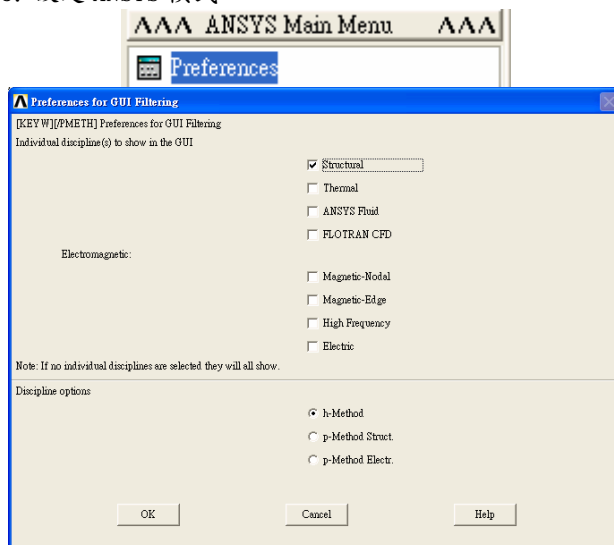


圖 11

6. 設定所要使用的元素類型

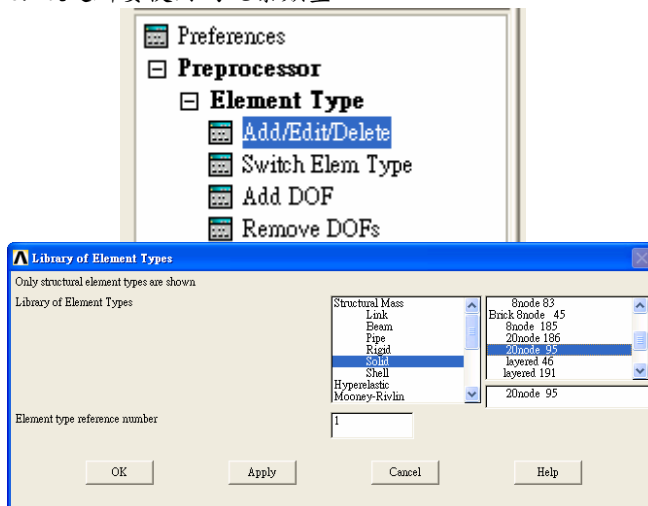


圖 12

7. 設定材料性質, 楊氏係數、浦松比、密度

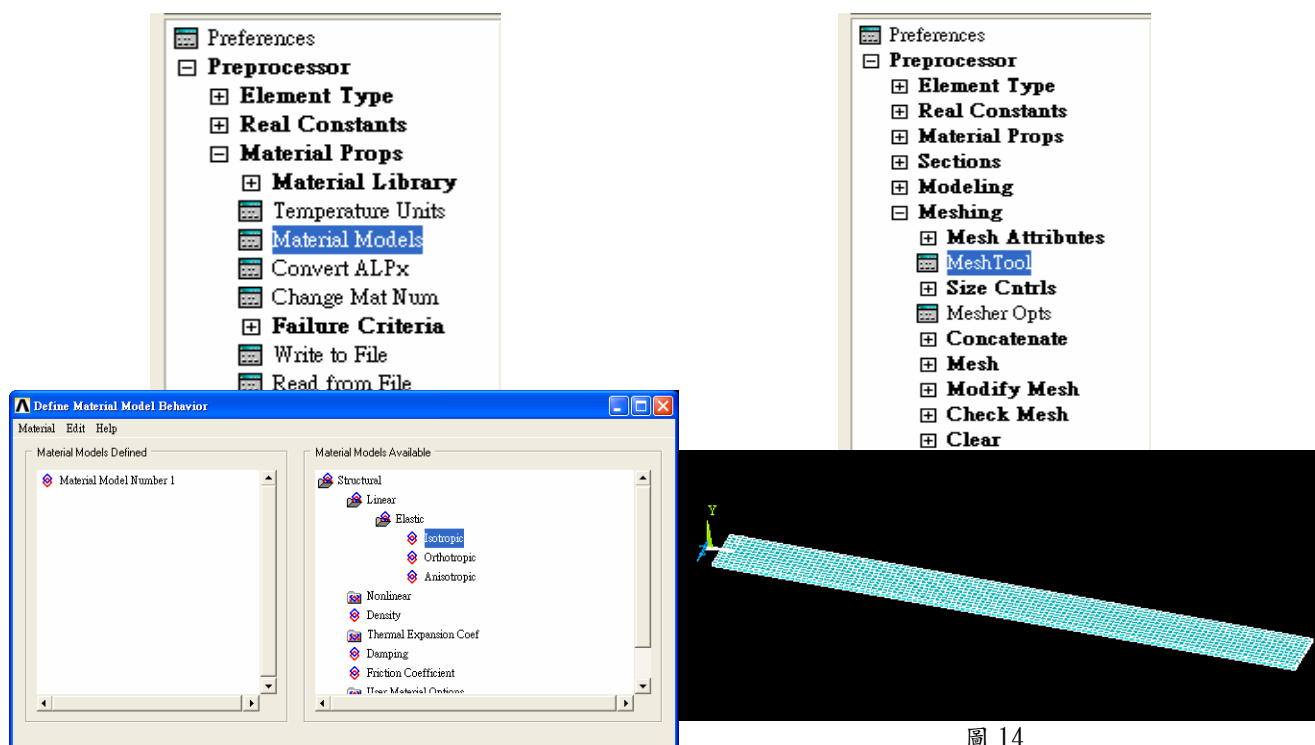


圖 14

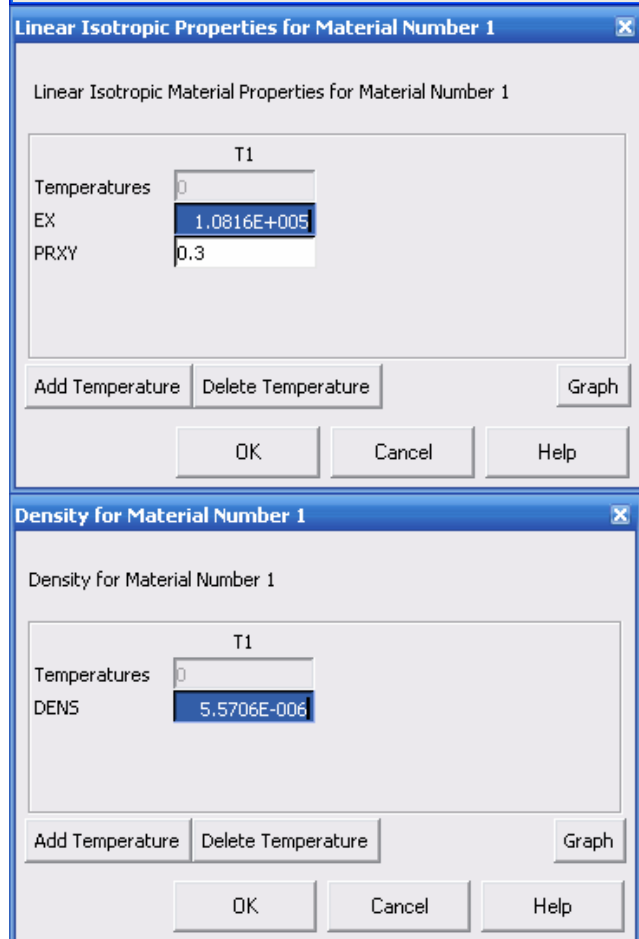
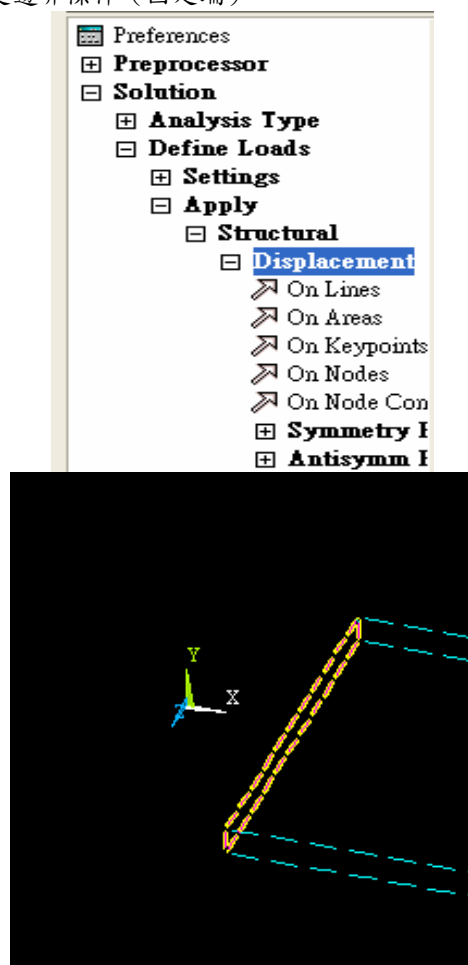


圖 13

8. 對零件進行網格化處理

9. 設定邊界條件（固定端）



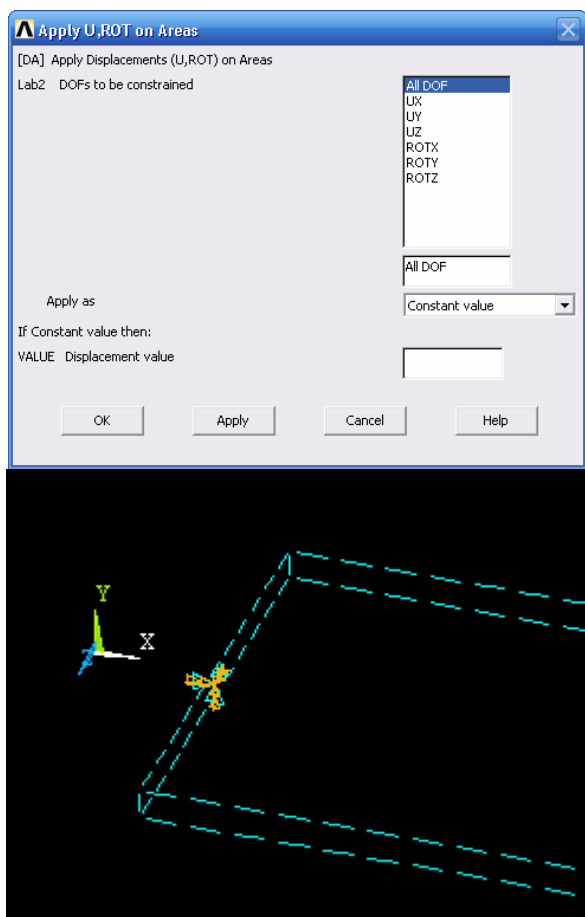


圖 15

10. 設定邊界條件（簡支端）

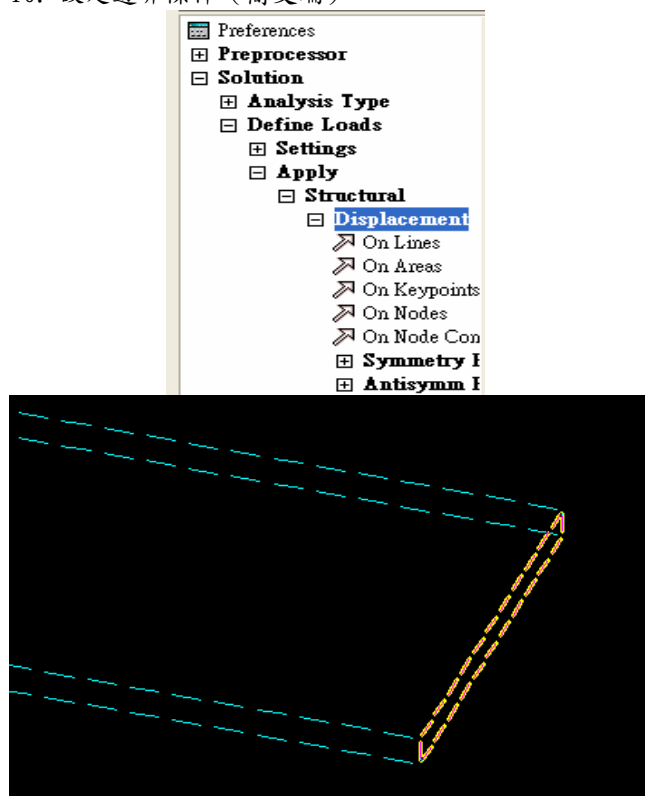


圖 16

11. 進行振動分析（模態分析）

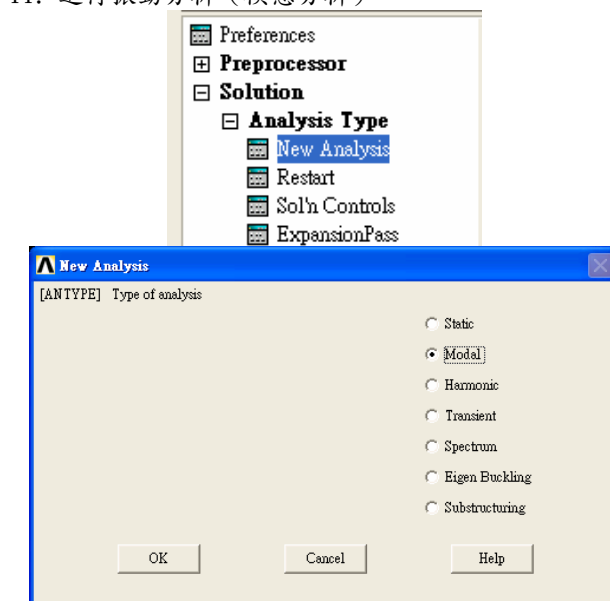


圖 17

12. 設定振動分析所需參數，並產生所需要的 RST 檔

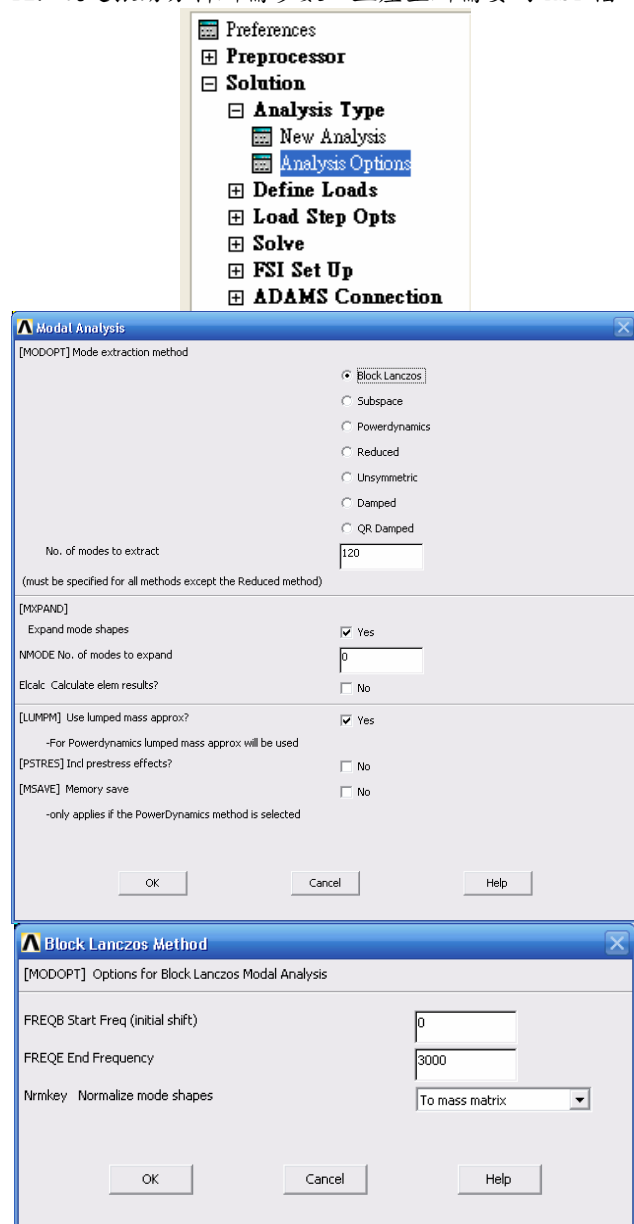


圖 18

13. 求解

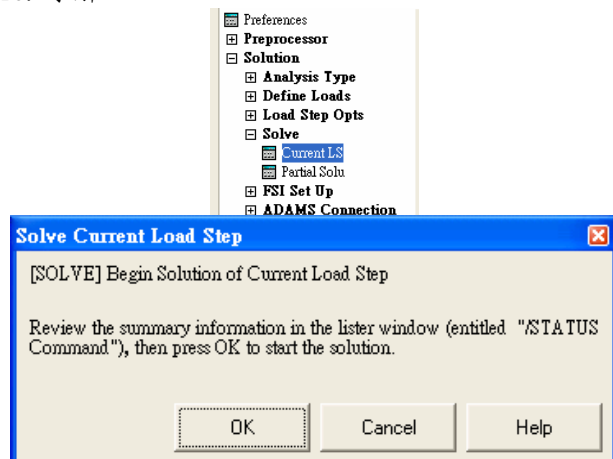


圖 19

14. 儲存 ANSYS 檔案，觀看第一個模態結果

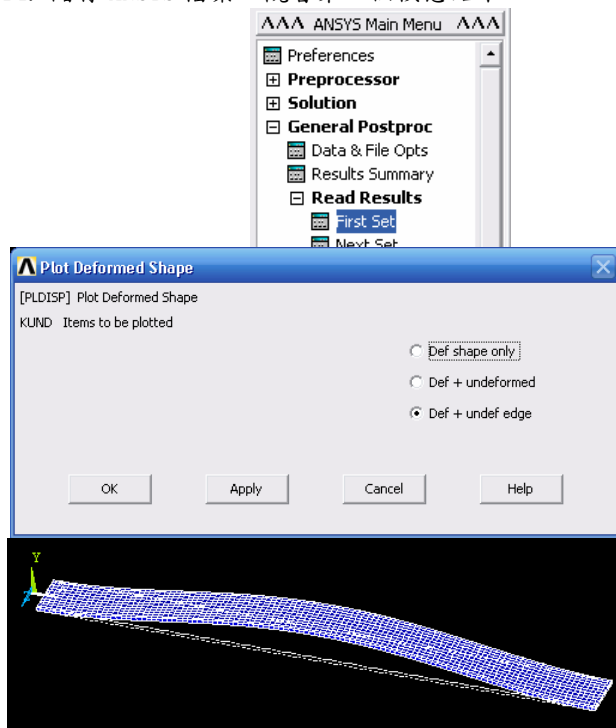


圖 20

4.2 ANSYS 分析之模態振型：

● 短尺：

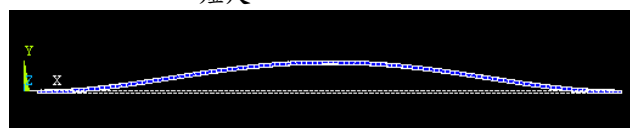


圖 21 第一模態

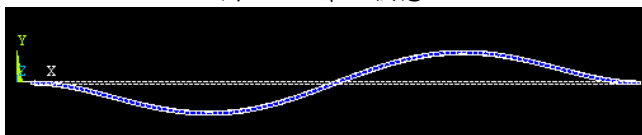


圖 22 第二模態

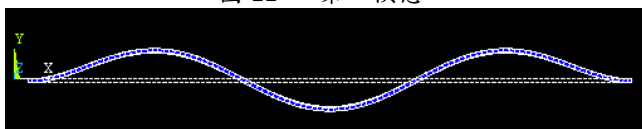


圖 23 第三模態

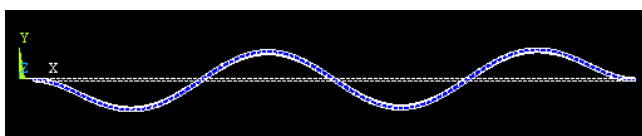


圖 24 第四模態

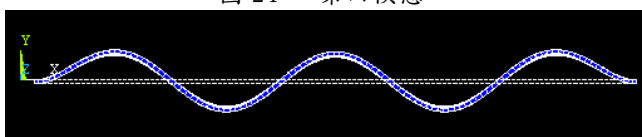


圖 25 第五模態

5. 結論

我們從前面五個模態與自然頻率的比較中可得知：

表 5 短尺簡支樑結構的自然頻率理論值與實驗值

模態	理論值 (Hz)	ansys 值 (Hz)	Photon 實驗值 (Hz)	CI2250 實驗值 (Hz)
1	109.12	108.75	110	112
2	353.59	356.01	353	362
3	737.63	735.5	736	746
4	1261.48	1266.6	1260	1290
5	1924.81	1920.1	1920	1950

表 6 短尺簡支樑結構的自然頻率誤差值比較

模態	ansys 與理論值誤差 (%)	Photon 實驗值與理論值誤差 (%)	CI2250 實驗值與理論值誤差 (%)	ansys 與實驗值誤差 (%)
1	0.339	0.806	2.639	1.149
2	0.684	0.167	2.378	0.845
3	0.289	0.221	1.135	0.068
4	0.406	0.117	2.261	0.521
5	0.245	0.250	1.309	0.005

表 7 長尺簡支樑結構的自然頻率理論值與實驗值

模態	理論值 (Hz)	ansys 值 (Hz)	Photon 實驗值 (Hz)	CI2250 實驗值 (Hz)
1	9.379	9.4837	9.46	9.73
2	30.393	30.561	30.5	31.3
3	63.403	63.352	63.3	64.9
4	108.431	107.88	108	112
5	165.448	164.18	164	171

表 8 長尺簡支樑結構的自然頻率誤差值比較

模態	ansys 與理論值誤差 (%)	Photon 實驗值與理論值誤差 (%)	CI2250 實驗值與理論值誤差 (%)	ansys 與實驗值誤差 (%)
1	1.116	0.864	3.742	0.250
2	0.553	0.352	2.984	0.200
3	0.080	0.162	2.361	0.082
4	0.508	0.397	3.291	0.111
5	0.766	0.875	3.356	0.110

由表 5 至表 8 可以得到以下綜合結論：

1. 所有誤差值皆在容許範圍之內，因此可以驗證此類簡支樑產品的共振頻率。
2. SignalAnalyzer-CI2250 頻譜訊號分析器屬於較舊型機器，分析出來的值與理論值誤差也就較大；Photon-II /RT-Pro 頻譜訊號分析器的硬體設備較新穎，反應時間與精度較高，所收取的值也比較精準。
3. 從誤差值可明顯地看出長尺的準確度比短尺略差。

本研究研究計畫的振動模態實驗之實驗結果以及有限元素 ANSYS 模擬分析與理論分析出來的數據有所差距，推斷可能因以下幾個因素造成誤差：

1. 激振器特性：不太容易以頻譜分析儀的輸出函數來加以控制、不能提供預負載。如激振頻率範圍、激振頻率與自然頻率重複、振動幅度範圍…等，所造成的差異。
2. 模型結構與量測系統影響：如鎖定扣件的鬆動、模型結構剛性不足、簡支條件鬆動，在分析與實驗中所造成的誤差。
3. 資料頻率截取之影響：從類比訊號到數值訊號轉換過程中取樣頻率時，可能因在取樣時漏失 (Leakage) 造成自然頻率附近的數據被扭曲；或是取樣時間過長，造成數據後有雜訊，造成數據的差距。
4. 週遭環境&人為因素的影響：在收取值的時候，由於不是在一個隔振的實驗室中或隔振平台上進行之，因此所測出來的值會因為外界因素或者是加速度感測器黏貼位置的問題而有所誤差。

6. 致謝

本研究特別感謝行政院國科會工程處在合約 NSC 92-2622-E150-008-CC3 與 NSC 93-2815-C-150-012-E 以及國立虎尾科技大學鼓勵性研究計畫合約 TCS93234 下所提供專題研究計畫的補助，使得本研究計畫理論分析、模態實驗與數值分析的模擬能夠順利完成。

7. 參考文獻

- [1] Ewins, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd., Letchworth Hertfordshire, England, 1984.
- [2] Akio, N., "State of Art on Modal Analysis in Japan," Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference, pp. 227-232, 1992.
- [3] Huang, T. C., *Modal analysis, modeling, diagnostics, and control: analytical and experimental*, ASME DE (Series), Vol. 38, 1991.
- [4] Inman, D. J., *Vibration with control, measurement and stability*, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [5] Cheng, J., 基本振動理論與實務入門教材 (一) 與 (二)，山衛科技股份有限公司，1998。
- [6] Timoshenko, S. P., Young, B. H., and Weaver W., *Vibration Problems in Engineering*, 4th Edition, John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [7] Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, The Collier-MacMillan, London, 1967.
- [8] Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 1986.
- [9] 黃運琳，空間開迴路撓性機構的振動量測與模態分析，MM 機械技術雜誌，十月號，No. 224, pp. 148-155, 2003。
- [10] ANSYS 7.0 使用手冊，虎門科技股份有限公司。